

# **Rendere essenziale il curriculum di matematica per la Scuola Media**

**Paolo Gentilini  
Genova, 5-3-2008**

**Progetti di Ricerca-Formazione  
*Educazione alla Razionalità, all'Argomentazione, alla Logica e  
Matematica e Innovazione Curricolare***

**Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica-exIRRE-  
Liguria**



## **Competenze dichiarative, abilità procedurali**

Abbiamo notato che per gli studenti di oggi è necessario, più che in passato, accertare lo stato *dichiarativo* della loro competenza matematica:

**La competenza dichiarativa** è tale che il sapere e il saper fare sono completati da una consapevolezza concettuale in seguito alla quale il soggetto **sa giustificare la conoscenza usata, dichiarando il sapere soggiacente, ed avendo la competenza linguistica adeguata ad esprimerlo**

**Le abilità procedurali** sono importanti ma di per sé non costituiscono competenza matematica

[**abilità procedurale**: capacità di memorizzare e di eseguire correttamente una sequenza di istruzioni operative]

## Competenza matematica dichiarativa: il livello della spiegazione e della giustificazione

### Esempi elementari

Al primo anno del secondo ciclo risulta spesso necessario far capire che la giustificazione della procedura usata è importante quanto la procedura, e puntualizzare che senza un certo livello di competenza linguistica non si può fare matematica

**Esempio** [Gruppo Educazione alla Razionalità IPSCT Caboto-Chiavari-prof. M.C.Rezzano]

(Classe prima, esercitazione scritta)

1. Cosa vuol dire confrontare due numeri? Scrivi due frazioni a tua scelta. Spiega un procedimento per confrontarle ed applicalo alle frazioni che hai scelto.
2. Scrivi la definizione di frazioni equivalenti. Spiega come faresti per verificare che le frazioni  $10/15$  e  $4/6$  sono equivalenti? E per verificare che  $4/3$  non è equivalente a  $5/4$ ?
3. Spiega come si fa a riconoscere se una frazione è ridotta ai minimi termini. Quali proprietà devi applicare per ridurre una frazione ai minimi termini?
4. Scrivi alcune definizioni che conosci. Per ciascuna fai un esempio. Scrivi alcuni teoremi che conosci. Spiega che differenza c'è tra "definizione" e "teorema"?

\*\*\*\*\*

**Educare a *scrivere* spiegazioni e giustificazioni** Ossia portare a livello dichiarativo la conoscenza implicita che soggiace alle procedure, impegnando il discente a scrivere in italiano corretto le ragioni e le spiegazioni

**Esempio** [Gruppo Educazione alla Razionalità IPSCT Caboto-Chiavari] (Classe prima)

\*\*\*\*\*

Dimostra le proposizioni utilizzando l'enunciato che le precede.

**Enunciato 1** Se un numero intero  $m$  è il prodotto tra un numero intero  $n$  ed un altro numero intero (diverso da 0) **allora** si dice che  $m$  è multiplo di  $n$ .

Proposizioni da dimostrare:

- 1.1) 45 è multiplo di 15
- 1.2) 45 non è multiplo di 6

**Enunciato 2** Se il risultato della divisione  $m:n$  è un numero intero e il resto è 0 ( $m$  e  $n$  interi) **allora** si dice che  $m$  è divisibile per  $n$ .

Proposizioni da dimostrare:

- 2.1) 9 è divisore di 45
- 2.2) 3 non è divisore di 100

.....

## Competenza dichiarativa: *scrivere* spiegazioni e giustificazioni di tesi elementari

1) Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se è *vera* o *falsa*. Se è vera fai alcuni esempi utilizzando numeri a tua scelta, se è falsa fai un controesempio numerico che la contraddica:

- a) Se un numero è divisibile per 4 **allora** è anche divisibile per 2
- b) Se un numero è divisibile per 2 **allora** è anche divisibile per 4
- c) Se un numero è dispari **allora** è divisibile per 3
- d) Se un numero è primo **allora** è dispari.

2) *Dimostra* quelle fra le affermazioni precedenti che secondo te sono vere

[**Attenzione:** fra l'altro si introduce una distinzione, già a livello elementare, fra *verità* e *dimostrabilità* di un enunciato. E' possibile intuire che un enunciato è vero per evidenza e non saperlo dimostrare]

## ***Scrivere spiegazioni e giustificazioni di tesi elementari***

**Attenzione:** se gli studenti sono tali che questi esercizi sono indispensabili, la scrittura  $\langle\langle 45=3\bullet 15 \rangle\rangle$  non va accettata come dimostrazione della tesi (1.1)  $\langle\langle 45 \text{ è multiplo di } 15 \rangle\rangle$ .

E' accettabile questo testo

$\langle\langle \text{Poiché vale l'uguaglianza } 45 = 3\bullet 15 \text{ allora } 45 \text{ è multiplo di } 15 \rangle\rangle$ .

Questa apparente pedanteria insegna al discente che in generale non può cavarsela senza un discorso che esplicita i connettivi logici. Non può infatti in nessun modo provare la successiva (1.2) scrivendo solo un enunciato atomico: (1.2) ancorché banale, esige un testo di questo tipo:

$\langle\langle \text{La scomposizione in fattori primi di } 45 \text{ è } 5\bullet 3\bullet 3 \text{ ed è evidente che nessun prodotto di tali fattori può dare } 6. \text{ Allora } 45 \text{ non può essere uguale al prodotto di } 6 \text{ per un altro numero, e quindi non è multiplo di } 6 \rangle\rangle$

Tuttavia, se è opportuno chiedere che si esplicitino le inferenze usate, è **ugualmente opportuno che si educi alla non ridondanza.** Una dimostrazione matematica **non deve** contenere argomentazioni inutili.

## Competenze tacite

Una competenza in merito a un sapere complesso è **tacita** se il soggetto agisce e si esprime in linguaggio naturale come se padroneggiasse correttamente i contenuti di tale sapere, ma non sa dare ragione delle sue prestazioni nei termini di quei contenuti

**Es.** Per la maggior parte dei parlanti *la competenza linguistica è tacita*: un bambino di sei anni (?) è in grado di **rifiutare** la frase << oggi egli ho andato a casa>> come frase corretta della lingua italiana ma non sa spiegare perché

Le competenze matematiche chieste in uscita dalla secondaria di primo grado **non possono essere *tacite***.

**Competenza matematica dichiarativa: ancora esempi**

Scuola: Scuola secondaria di I° grado “G.Descalzo”, Sestri Levante, Genova

Docente: Marco Veirana

**2) Analisi argomentata del testo di un problema di geometria****Testo del problema**

Il perimetro di un rombo è 48 m e l'altezza misura 7,5 m

Calcola l'altezza del trapezio equivalente al rombo nel quale le basi sono congruenti rispettivamente al lato del quadrato la cui area è  $12,25 \text{ m}^2$  e al lato del triangolo equilatero il cui perimetro è 19,5 m

**Produzione**

1. Leggi il testo del problema con attenzione tante volte quanto basta per costruirti un modello della situazione problematica.

Riporta sul foglio la rappresentazione di tale modello

2. Dai il significato dei termini *equivalente* e *congruente*

2. Fai una parafrasi del testo

3. Individua i dati a disposizione, i dati richiesti, le condizioni in cui si opera

**Competenza matematica dichiarativa: ancora esempi**

Scuola: Scuola secondaria di I° grado "G.Descalzo", Sestri Levante, Genova

Docente: Marco Veirana

**3) Risoluzione argomentata di un problema di geometria****Testo del problema**

Un trapezio è equivalente ad un rettangolo il cui perimetro è 70 cm e una dimensione misura 21 cm.

Calcola la misura delle basi del trapezio sapendo che la sua altezza misura 15 cm e che una base è  $\frac{2}{5}$  dell'altra.

**Produzione**

1. Rappresenta, in modo verbale per iscritto e con disegni, la situazione problematica
2. Individua i dati a disposizione, i dati richiesti, le condizioni in cui si opera
3. Descrivi verbalmente per iscritto, con disegni se ne hai pensati o fatti, le attività che hai compiuto, i tentativi fatti per giungere alla stesura del procedimento risolutivo
4. Scrivi il procedimento risolutivo
5. Fai un controllo dei risultati verbalizzandolo per iscritto

## Necessità di rendere più essenziale il percorso didattico

Se gli obiettivi sono rivisitati in modo da circoscrivere bene le abilità solo procedurali, e nel corso si insiste sulla padronanza dichiarativa di alcune nozioni fondamentali, l'entità quantitativa del curriculum si riduce.

E' comunque utile focalizzare gli aspetti cruciali e condizionanti delle competenze volute

(Premetto *macro-* per dire *competenza in uscita dal ciclo*)

**Macro-competenza aritmetica**, sintesi:

**Padroneggiare**, anche nella risoluzione di problemi e per produrre semplici argomentazioni,

la definizione dei numeri razionali (insieme  $\mathbb{Q}$ ) e di tutte le operazioni aritmetiche fra essi;

la definizione delle potenze dei numeri razionali, del loro simbolismo e delle loro proprietà;

la definizione dei radicali quadratici e cubici dei numeri razionali, del loro simbolismo e delle loro proprietà.

## Macro-competenza aritmetica

La didattica si disperde perchè spesso non focalizza quale è il centro della competenza, *dal punto di vista cognitivo*, per il discente.

Diciamo che il **centro** *consiste nel padroneggiare il concetto di frazione e di tutte le operazioni connesse, sapendo gestire simultaneamente le sue diverse connotazioni matematiche e simboliche, infatti:*

[le seguenti sono cose risapute in sede disciplinare ma qui le cito perché intendo che il discente deve saper passare con continuità dall'una all'altra connotazione e quindi sono connotazioni cognitive]

$$\frac{a}{b} \quad \text{è}$$

$a:b$

**ma anche** il *rapporto* fra  $a$  e  $b$  (nel senso che in situazioni opportune si dice che  $a$  è  $\frac{a}{b}$  volte  $b$ )

**ma è anche** il *numero decimale* (eventualmente illimitato)  $c,d_1d_2d_3\dots$  che si ottiene applicando *l'algoritmo della divisione* fra  $a$  e  $b$

## Il centro (cognitivo) della macro-competenza aritmetica

**ma è anche** la classe di frazioni equivalenti  $\left\{ \frac{ma}{mb} : m \in \mathbf{Z}, m \neq 0 \right\}$

quindi ogni frazione è anche infinite frazioni equivalenti, **ma anche** un unico numero razionale corrispondente a tale classe

**ma è anche** il prendere gli  $\frac{a}{b}$ -esimi di una grandezza  $M$  facendo il prodotto

$$\frac{a}{b} M$$

inoltre, se  $b$  è 100, è anche l'operatore che dà lo  $a$  % della grandezza  $M$  tramite il prodotto  $\frac{a}{100} M$

inoltre ogni decimale finito  $c, d_1 \dots d_n$  con  $n$  posti dopo la virgola è  $cd_1 \dots d_n / 10^n$

## Osservazioni

-Un discente che raggiunge il centro della competenza non può trovare nulla di problematico in alcun punto di questa sequenza di uguaglianze:

$$3,45 \text{ per cento di } M = \frac{3,45}{100} M = \frac{345}{100} M = \frac{345}{10^4} M = 0,0345 M$$

- Il centro della competenza serve anche per dare al discente una motivazione esauriente di ciò che studia

-Le nozioni essenziali sui numeri naturali: *numero primo*, (teorema di) *scomposizione in fattori primi*, *massimo comun divisore*, *minimo comune multiplo*, devono essere consapevolmente usate nella somma di frazioni; tutte le proprietà di base delle potenze si trovano ad essere usate nel prodotto e quoziente di frazioni

- **Tutte le proprietà delle proporzioni dipendono da proprietà delle frazioni** nel senso che le proporzioni possono studiarsi partendo dalla forma  $a/b = c/d$  (per il discente che raggiunga il centro cognitivo della competenza ciò non può essere problematico): il fatto che da  $a/b = c/d$  segua  $ad=bc$  è una banale applicazione delle proprietà dell'uguaglianza ai numeri razionali

## Macrocompetenza algebrica

La **sintesi** della macrocompetenza algebrica è

*Saper affrontare la risoluzione di equazioni polinomiali a coefficienti razionali che siano riconducibili al primo grado*

espresso così, il suo nocciolo cognitivo resta mascherato. Quindi il *centro* è:

*padroneggiare le **proprietà dell'uguaglianza fra numeri razionali** per esprimere una grandezza in funzione di altre, partendo da espressioni*

$$f(a,b,c,d..)=g(a,b,c,d..)$$

*dove, in prima istanza, nelle funzioni  $f$  e  $g$  non compaiono né radici né potenze maggiori di 1, ma possono comparire tutti gli altri operatori aritmetici*

**Le proprietà dell'uguaglianza** sono semplici da presentare, ma vanno commentate a fondo

**Esempio di** presentazione che parte dai numeri razionali, e si presta a commenti che riprendono molte proprietà dei numeri:

*Se vale una uguaglianza fra grandezze espresse da numeri razionali:*

$$M=N \qquad \text{allora:}$$

*-moltiplicando entrambe le parti dell'uguaglianza per un arbitrario numero razionale  $S$  l'uguaglianza ottenuta  $SM=SN$  è vera*

*-sommando ad entrambi le parti dell'uguaglianza lo stesso numero razionale  $S$ , l'uguaglianza ottenuta  $S+M=S+N$  è vera*

- Nota:** 1) Può essere opportuno partire dai soli numeri naturali e allora la presentazione cambia  
 2) Va rifatta, durante la presentazione, la discussione sulla riflessività, simmetria, transitività della relazione di uguaglianza  
 3) In un **successivo passo**, si può presentare l'estensione alle potenze e alle radici,

**E vanno applicate da subito**, senza aspettar di fare le equazioni in senso proprio, **alle formule che nascono dalla risoluzione di problemi** (geometrici o fisici o altro)

## **Padroneggiare il prima possibile le proprietà dell'uguaglianza**

Ad esempio, se il discente ha assimilato la formula dell'area del trapezio:

$$a = \frac{(b+c)h}{2}$$

Non deve avere problemi ad esprimere  $c$  usando le proprietà dell'uguaglianza:

$$2a = (b+c)h$$

$$2a/h = b+c$$

(se la formula si riferisce all'area di un trapezio è convenuto che  $h$  non sia nullo)

$$2a/h - b = b+c-b$$

$$2a/h - b = c$$

**Con questo tipo di didattica della relazione di uguaglianza fra razionali, il capitolo sulle proporzioni diventa ridondante**

## Proprietà dell'uguaglianza, centro della competenza algebrica: osservazioni

E' impressionante quanti studenti nei primi anni delle superiori applicano i passi canonici di riduzione di una equazione **senza sapere che stanno applicando le proprietà dell'uguaglianza**. Questa involuzione diventa il tipico esempio di uso di una procedura di cui si è dimenticata la ragione; il che, fra l'altro, porta spesso a errori grossolani. Non è rarissimo trovare conclusioni come queste:

$$5x=13$$

$$x= 13-5$$

Se il discente usa i passi canonici di semplificazione di una equazione (intera, fratta...) senza saper spiegare che sono compiuti in funzione dell'applicazione delle proprietà dell'uguaglianza, **allora non sa risolvere le equazioni, anche se i passaggi presentati sono materialmente corretti**

## Proprietà dell'uguaglianza, equazioni e disequazioni

Da quanto precede viene lo spunto per osservare che è **opportuno separare nettamente la didattica delle equazioni da quella delle disequazioni. Infatti:**

- Le proprietà della relazione d'ordine fra razionali rispetto alle operazioni aritmetiche sono **sostanzialmente** diverse da quelle dell'uguaglianza, e con un minore grado di evidenza

- E' concettualmente diverso il problema algebrico di riferimento. Infatti: la risoluzione di una *equazione* polinomiale è la ricerca dell'eventuale insieme **finito** di numeri che soddisfa l'equazione

la risoluzione di una *disequazione* polinomiale è, propriamente, riconducibile allo *studio del segno di un polinomio*, e inoltre, la relazione richiesta dalla disequazione è in generale soddisfatta da insiemi **infiniti** di numeri.

Solo per il primo grado si dà una procedura di risoluzione della disequazione che **assomiglia esteriormente** a quella dell'equazione, ma i significati coinvolti sono diversi.

## Separare la didattica delle equazioni da quella delle disequazioni

- Infine è evidente che nella scuola media le equazioni sono al centro della macrocompetenza **di base** richiesta, le disequazioni no. Non è drammatico inserire equazioni di secondo o terzo grado binomie nel percorso (nascono in modo naturale dai problemi in cui si usa il teorema di Pitagora o da espressione di volumi) ma solo in ambito di approfondimento possono introdursi disequazioni di secondo grado

Già da casi semplici di secondo grado si vede che la rottura concettuale con le equazioni è totale:

da  $x^2 - 2 < 5$

posso senz'altro ottenere per le proprietà della relazione  $<$  rispetto alla somma:

$$x^2 < 7$$

ma questo non mi porta da nessuna parte e la tentazione di “fare la radice da entrambe le parti” è notoriamente un nonsenso. Il significato matematico della richiesta  $x^2 < 7$  è *dire per quali valori di  $x$  il polinomio  $x^2 - 7$  è minore di 0*

## **Il “calcolo letterale” all’interno della macro-competenza algebrica, e la competenza simbolica**

L’uso delle lettere per rappresentare insiemi (infiniti) di numeri **deve nascere in modo naturale dai problemi di geometria e di fisica**, come necessità di operare con grandezze generiche, che possono assumere infiniti valori all’interno di un *insieme di definizione* dato dai vincoli del problema o dalle operazioni aritmetiche coinvolte ( es: se  $a$  è la misura di un segmento allora non può variare anche nei numeri negativi; se  $a$  è il denominatore di una funzione fratta allora non può assumere valore zero, ecc)

A partire da questa motivata necessità, l’introduzione di monomi e polinomi **deve essere giustificata in funzione della risoluzione di equazioni** (e sistemi di equazioni)

## **Competenza algebrica, competenza simbolica**

Le operazioni aritmetiche fra monomi e polinomi evidenziano in modo didatticamente molto utile le proprietà essenziali delle operazioni aritmetiche, che allo studente dovrebbero essere già familiari:

**quindi, a maggior ragione, la competenza di calcolo letterale deve essere dichiarativa,**

**e, a seconda del contesto,**

**il discente deve saper spiegare il significato dei simboli usati e giustificare le trasformazioni da una scrittura all'altra**

## Macro-competenza geometrica

### Sintesi:

- padroneggiare le proprietà indipendenti dalla misura dei poligoni piani, e la nozione di poligoni congruenti; padroneggiare le proprietà metriche dei poligoni piani (perimetri, aree) e la nozione di poligoni equivalenti;
- **saper dare una giustificazione argomentata razionale:**  
dei criteri di disuguaglianza di triangoli  
delle principali proprietà dei quadrilateri  
di tutte le formule di perimetro e area dei poligoni studiati
- padroneggiare la nozione di similitudine fra poligoni, e i criteri di similitudine fra triangoli, usandoli nella risoluzione di problemi;
- saper applicare il teorema di Pitagora nella risoluzione di problemi
- padroneggiare le proprietà essenziali della circonferenza e del cerchio e **acquisire il fatto che  $\pi$  è un numero “eccezionale”**, diverso da tutti i razionali, e da tutti i radicali di numeri razionali

**Macro-competenza geometrica: sintesi**

-saper applicare le proprietà essenziali di parallelepipedo, piramide, cono, sfera e le relative formule per le aree e i volumi nella risoluzione di problemi

**Centro della competenza: saper risolvere problemi non banali** intorno a figure piane, usando anche strumenti algebrici (equazioni), **e saper produrre “dimostrazioni” di semplici tesi** tramite argomentazioni accettabili in linguaggio naturale

## **Educazione meta-matematica tramite il corso di Geometria**

In geometria il discente incontra verità matematiche importanti di cui non può capire la dimostrazione matematica (es: il volume della sfera). Questo è educativo, perché il ragazzo deve sapere che:

- esistono problemi matematici che possono essere difficili ma a cui si può dare risposta con strumenti elementari, e quindi, in linea di principio, alla sua portata;
- esistono problemi matematici **che si possono esprimere in modo semplice**, che non possono essere risolti con mezzi elementari, e che nella storia della matematica hanno avuto una soluzione. Di tali problemi è importante e formativo conoscere la risposta anche se non si è preparati per apprendere la sua dimostrazione. Es: *il volume della sfera;  $\pi$  non è razionale*; e così via. (Apprendere che il volume della sfera è quello di un cono retto con base il cerchio massimo e altezza il raggio è stimolante per l'intelletto anche se non si sa il perché)
- esistono problemi matematici **che si possono esprimere in modo semplice**, *ma che non sono stati ancora risolti da nessuno*, e non si sa neanche *se siano risolvibili* (ad es, fino al 1999, il teorema di Fermat)

## Competenza logica

Diversamente da quanto concerne i settori della matematica precedentemente visti, sosteniamo che la competenza logica in uscita dal ciclo di primo grado debba essere **ben sviluppata, ma per lo più tacita** *in quanto alla logica formale*

Parleremo della competenza logica in un prossimo seminario